Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo

Texto para Discussão

Série Economia

TD-E 12 / 2009

UTILIDADE ESPERADA SUBJETIVA COM DESCRIÇÃO IMPERFEITA DAS CONSEQUÊNCIAS.

Dr. Antonio Cesar Baggio Zanetti

Av. Bandeirantes, 3900 - Monte Alegre - CEP: 14040-900 - Ribeirão Preto-SP
Fone (16) 3602-4331/Fax (16) 3602-3884 - e-mail: cebelima@usp.br site:www.fearp.usp.br

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo

Universidade de São Paulo

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto

A série TEXTO PARA DISCUSSÃO tem como objetivo divulgar: i) resultados de trabalhos em desenvolvimento na FEA-RP/USP; ii) trabalhos de pesquisadores de outras instituições considerados de relevância dadas as linhas de pesquisa da instituição. A série foi subdividida em função das principais áreas de atuação da FEA-RP/USP: Economia, Administração e Contabilidade. Veja o site da CPq na Home Page da FEA-RP: www.fearp.usp.br. Informações: e-mail: cpq@fearp.usp.br

Utilidade Esperada Subjetiva com Descrição Imperfeita das Conseqüências*

Antonio Cesar Baggio Zanetti

28 de setembro de 2009

Resumo

Este artigo reformula o modelo de teoria de decisão de Savage [15] relaxando a hipótese implícita de que uma conseqüência é uma descrição perfeita de uma determinada situação. Axiomas comportamentais sobre preferências definidas no espaço de atos são introduzidos e uma representação na forma de Utilidade Esperada é derivada. Em particular, como em Savage, há uma única probabilidade subjetiva sobre os estados da natureza. O ganho de flexibilidade da reformulação apresenta uma solução para o paradoxo de Ellsberg que não faz uso de múltiplas probabilidades subjetivas, e uma reinterpretação da aversão ao risco no modelo de Utilidade Esperada convencional.

1 Introdução

Em modelos que seguem o modelo de decisão de Savage [15], um ato é definido como uma função que associa estados da natureza a conseqüências. Uma conseqüência, por sua vez, é assumida como sendo uma descrição completa de como o indivíduo percebe uma determinada situação, e em particular é independente do ato. Tudo que é importante para o indivíduo tem que ser explícito na conseqüência, até mesmo o efeito que a ação em si pode causar.

O objetivo deste artigo é propor um novo modelo que relaxa em partes esta hipótese mas mantém a simplicidade que um modelo de utilidade esperada possui.

*artigo em progresso

No modelo de Savage, ou modelos que seguem essa mesma linha, ao ser especificada uma situação de escolha com incerteza (estados da natureza S, conseqüências X e atos $F = \{f|f : S \to X\}$), um ato deve ser expresso apenas por suas conseqüências, ou seja, um ato é definido apenas como um elemento de X^S. Isto implica que toda a informação que precisamos saber sobre um ato é seu gráfico (em $S \times X$). Porém, o que acontece na prática é que tanto ação, quanto as devidas conseqüências de cada estado (ato como em Savage) são especificadas. Assume-se, então, que o ato e a ação são idênticos[1]. Para melhor exposição do problema, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1 *Para demonstrar uma má especificação do modelo de Savage, Kreps [7] utiliza uma versão do seguinte exemplo: Suponha que existam dois estados s_1 e s_2, definidos como s_1="vende" e s_2="não vender", duas ações, f e g, em que f="fazer propaganda" e g="não fazer propaganda". Supondo que o custo de f seja \$1, o custo de g \$0 e o preço do produto a ser vendido igual a \$10, podemos dizer que as conseqüências para cada estado (o ato) são: $f(s_1) = 9$, $f(s_2) = -1$ e $g(s_1) = 10$, $g(s_2) = 0$.*

Neste exemplo g domina f em todos os estados, então é esperado que g seja preferido a f, porém é razoável que f seja preferido a g porque o ato f deve alterar a probabilidade de um estado ocorrer. Ao se "fazer propaganda" é em geral esperado que a probabilidade de "vender" aumente. Esta afirmação é completamente correta sob a hipótese que a conseqüência descrita captura toda ação.

O ato f, como está definido no exemplo, é a representação da ação "fazer propaganda" no modelo. A hipótese de que a conseqüência tem que ser uma descrição perfeita da resolução final da ação, em cada estado de natureza, implica que o valor monetário do ganho ou da perda da propaganda é o único resultado que o agente leva em consideração para ordenar suas preferências. A maneira como o Exemplo 1.1 foi modelado exclui a possibilidade do agente preferir a *ação* "fazer propaganda"

[1] Em geral também não são explícitos estados de natureza, em seu lugar são especificados eventos.

a “não fazer propaganda”, no sentido que, um valor fixo recebido ao “fazer propaganda” é, obrigatoriamente, indiferente a este mesmo valor no caso de “não fazer propaganda”.

Ao criarmos simplificações deste tipo é possível que, enquanto o modelador acredita no poder descritivo de um ato para representar uma ação, o indivíduo pode estar avaliando uma outra situação. Neste caso, existirão diferenças importantes na avaliação das preferências que podem levar a conclusões erradas. No Exemplo 1.1, ao relaxarmos a hipótese de que a conseqüência é perfeita, não podemos sequer afirmar que o agente acredita que a probabilidade do estado “vender” é afetada por sua propaganda (mesmo que pareça óbvio). O ato deixa de ser uma descrição perfeita da ação e quando observamos a escolha revelada não é possível determinar o que o agente está considerando em sua decisão de escolha.

Exemplo 1.2 *Um indivíduo vai a uma corrida de 7 cavalos e pretende apostar o valor de \$1. Podemos modelar que cada resultado da corrida é um estado de natureza e que as ações são as apostas em cada cavalo. Duas apostas, f e g, podem ser definidas como: f= “apostar \$1 no cavalo” e g= “apostar \$1 no cavalo 7”. Se ao final da corrida o cavalo vencedor for idêntico ao cavalo apostado, o individuo ganha \$100, caso contrário, ganha \$0. A conseqüência descrita é o valor que o indivíduo recebe (100 ou 0) menos o valor apostado (\$1).*

Considerando o Exemplo 1.2 acima, suponha que o indivíduo revele preferir estritamente “apostar \$1 no cavalo 7” a “apostar \$1 no cavalo 4”. Esta preferência *estrita* parece ser uma indicação clara que o indivíduo percebe as chances do cavalo 7 vencer como maiores que as do cavalo 4. Entretanto, é possível que quando perguntado sobre a probabilidade de cada cavalo vencer, este mesmo indivíduo revele não acreditar que tais probabilidades sejam, de fato, diferentes. Esse pode ser o caso de uma pessoa que não entende **absolutamente nada** sobre cavalos (e teoricamente assume que a probabilidade de qualquer cavalo vencer é igual) e possui alguma simpatia pelo número[2] 7. No modelo de Savage, estas revelações de preferências geram uma contradição.

Por agora, este exemplo motiva nossa hipótese: Podem existir fatores importantes da resolução de uma ação que não estão descritos na conseqüência, e esta não captura toda situação. Desta forma existe uma importante diferença nas conseqüências descritas pelo modelador e as conseqüências que seriam descritas pelo agente no modelo normativo[3]. Esta diferença, como já citamos, pode gerar interpretações errôneas do modelador sobre o que se refere às preferências reveladas, e assim, sobre as conseqüências ou probabilidades.

O que podemos afirmar, partindo destes exemplos, é que a sensibilidade da teoria à maneira como o modelo de fato empregado é apresentado é muito grande e pode exigir muito do modelador. Adicionalmente, os exemplos descritos acima motivam uma reformulação do modelo do Savage, com o objetivo de capturar situações como as acima descritas, mas ainda assim manter a simplicidade de uma representação em forma de Utilidade Esperada.

2 Resultado Principal

A descrição de uma conseqüência pode ser inadequada por se tratar de uma falha de interpretação do modelador (ou da pessoa que realiza experimentos) ou por não ser possível descrevê-la, mesmo para o próprio indivíduo. Apesar de existirem diversas maneiras deste problema ocorrer, estamos interessados em descrições que falham apenas parcialmente em capturar toda a situação final (resultado final da ação após o estado se realizar). Em particular, a critério de interpretação, considere que uma situação final pode ser representada por um vetor com n coordenadas, cada qual

[2] De fato, em estatística, o número 7 e chamado de número cabalístico, justamente porque indivíduos, por alguma razão, tendem a mencionar o número 7 com mais freqüência que outros números

[3] Aqui, modelo normativo se refere a situação em que o agente acredita que os axiomas são razoáveis e utiliza o modelo para tomar suas decisões e assim modela as conseqüências para si mesmo.

representando uma característica importante da conseqüência. Estamos interessados em descrições que explicitam de maneira *correta* apenas algumas coordenadas[4]. Este tipo de descrição, que será definida através dos axiomas permitirá desenvolver um novo modelo de Utilidade Esperada.

Vamos assumir que uma conseqüência pode ser interpretada como o par ordenado $\{w, \theta\}$ em que $w \in W$ é uma conseqüência mal descrita, $\theta \in \Theta$ é um fator de correção da descrição da conseqüência[5]. Chamaremos de x a conseqüência como um todo, caso seja possível descrever esta conseqüência de maneira perfeita, x e w seriam equivalentes (θ não possuiria nenhum efeito em termos de preferências) e este modelo seria idêntico ao modelo de Savage. Assumimos então que $x = \{w, \theta\}$[6]. Este fator de correção das preferências pode ser definido de outras formas, como por exemplo, uma função ou correspondência entre relações de preferências, porém por simplificação adotaremos o par ordenado.

Para melhor entender o significado de θ considere que uma pessoa está indo para o trabalho e tem que decidir se leva ou não um guarda-chuva, podemos considerar duas ações: $f =$"levar guarda-chuva" e $g =$"não levar guarda-chuva". X, o espaço das conseqüências perfeitamente descritas pode ser interpretado como um vetor de duas características da seguinte forma:

$$X = \begin{cases} x_1 = \text{(seco, carregando guarda-chuva)} \\ x_2 = \text{(seco, não carregando guarda-chuva)} \\ x_3 = \text{(molhado, carregando guarda-chuva)} \\ x_4 = \text{(molhado, não carregando guarda-chuva)} \end{cases}$$

Neste exemplo , teremos $f(chuva) = x_1$ e $f(sem\ chuva) = x_1$ enquanto que $g(chuva) = x_4$ e $g(sem\ chuva) = x_2$. Uma má descrição da conseqüência seria

[4]O conjunto de conseqüências, no entanto, continuará recebendo tratamento abstrato.

[5]θ possuirá uma interpretação bem definida no teorema principal e poderemos chama-lo de conseqüência oculta. Por enquanto não existe nenhum tipo de restrição para que uma única interpretação possa ser adotada.

[6]A rigor poderíamos assumir a seguinte equivalência: $x \sim \{w, \theta\}$, porém por simplificação assumiremos a igualdade.

omitir o ônus de carregar o guarda-chuva e considerar apenas "seco" ou "molhado" como conseqüências. A conseqüência não descrita seria, neste caso, exatamente carregar ou não o guarda-chuva. Apesar deste ser um exemplo claro sobre estes tipos de conseqüências, nem sempre a conseqüência descrita é uma parte explícita da conseqüência total. Por exemplo, se o bem "guarda-chuva" é uma conseqüência descrita, como ocorre em modelos de cestas de bens do tipo Arrow-Debreu, a preferência por guarda-chuva claramente é dependente do estado de natureza, a conseqüência não descrita para este tipo de problema seria um fator de correção das preferências que elimina as características do guarda-chuva que o fazem depender do estado de natureza. Seria equivalente a assumir que guarda-chuva não depende do estado de natureza e na verdade a responsável por esta diferença é a conseqüência não descrita que está variando entre estes estados (observamos apenas w mas não x). Dada esta nova definição de conseqüências, podemos diferenciar e redefinir o que chamaremos de ato e ações. Esta diferença é fundamental para o melhor entendimento do modelo, antes considere as seguintes definições:

$s \in S$ é o estado de natureza. A, $B \subseteq S$ são eventos. Um evento é um conjunto de estados de natureza s. X é o conjunto de conseqüências, seus elementos serão denotados por x, y. W é o conjunto da parte da conseqüência descrita w e Θ o conjunto de correção das preferências (que será melhor definido como conseqüência oculta) θ, não é preciso especificar uma álgebra de conjuntos porque vamos derivar uma probabilidade finito aditiva no conjunto das partes de S.

Definição 2.1 *O conjunto das possíveis ações (não atos), F é definido como:*

$$F = \{f \mid f : S \to W \times \Theta\}$$

As ações são alocações de um par pertencente à $W \times \Theta$ para cada estado de natureza. Uma ação considera qualquer efeito adicional que foi deixado de lado na descrição, tanto por uma falha do modelador quanto por qualquer outra impossibilidade. Esta função é a aproximação perfeita de uma ação relativamente a suas eventuais conseqüências.

Definição 2.2 *O conjunto dos possíveis atos, F_w é definido como:*

$$F_w = \{f_w \mid S \to W\}$$

O ato, como a ação, também é um conjunto de conseqüências associadas a estados de natureza. Uma forma de interpretar o ato é considerar que se trata apenas de alocações de conseqüências *antes* destas serem associadas a uma ação, ou seja, se trata de um elemento puramente matemático. Desta forma, um ato é uma aproximação não necessariamente perfeita da ação, este pode ou não ser bem descrito e ser o único elemento significativo em termos de preferências para o agente.

A diferença entre ato e ação pode ser facilmente percebida com um exemplo: Considere a ação "apostar no número 1". Um *ato* que pode descrever esta *ação* seria f_w =100 caso 1 seja sorteado e f_w =0 caso contrário. O número 1 no entanto, pode representar mais que simplesmente o valor do prêmio recebido, pode ser um número de sorte do agente, e neste caso existiria uma conseqüência oculta adicional ao valor do prêmio, esta conseqüência poderia ter a forma: "apostar no número de sorte" e a *ação* poderia ser apresentada como: f =(100, "apostar no número de sorte") caso o número 1 seja sorteado e f =(0, "apostar no número de sorte") caso contrário.

O *ato* nada mais é que uma alocação de prêmios descritos para cada estado de natureza e a princípio pode ser utilizado para representar diversas *ações*.

Dadas as definições de atos e ações podemos ainda definir “atos ocultos” como:

Definição 2.3 *O conjunto dos possíveis atos ocultos, F_θ é definido como:*

$$F_\theta = \{f_\theta \mid S \to \Theta\}$$

A definição de *ato oculto* é análoga a definição do ato, ou seja, uma distribuição de conseqüências para cada estado de natureza, estas porém agora ocultas. No exemplo anterior teremos $f_\theta =$ “apostar no número de sorte” para todos estados de natureza.

Da mesma forma que definimos as conseqüências x podemos definir uma ação através dos atos e dos atos ocultos como:

$$f = \{f_w, f_\theta\}$$

E igualdade de conseqüências como:

Definição 2.4 *Seja $x = \{\theta_f, w_0\}$ e $y = \{\theta_g, w_1\}$. Dizemos que x **é igual a** y (notação $x = y$) quando $\theta_f = \theta_g$ e $w_0 = w_1$*

A Definição 2.4 diz que duas conseqüências são iguais se tanto a parte oculta da conseqüência quanto a parte descrita coincidem.

Definição 2.5 *Seja A um evento. Dizemos que dois atos f e g são **iguais em** A ($f = g$ em A) quando $f(s) = g(s) \quad \forall s \in A$.*

A Definição 2.5 afirma também que dois atos são iguais se e somente se possuem a mesma conseqüência em cada estado de natureza de todo S. Esta definição depende de duas hipóteses implícitas. A primeira é que é possível separar bem cada estado s pertencente à A e ao mesmo tempo ser capaz de avaliar cada conseqüência uma a uma distribuídas entre os estados. E a segunda, exigimos independência entre ação e estado, pois a conseqüência do ato f em s_1 ($f(s_1)$) é comparada com a conseqüência de outro ato g também em s_1 ($g(s_1)$) assim, mesmo quando levamos em consideração o ato, o indivíduo continua diferenciando s_1 de s_2 (o ato não atrapalha a percepção de estado). A primeira hipótese se torna forte quando cada estado de natureza precisa ser uma descrição muito detalhada da realidade[7].

Definimos também: $\prec$ é uma relação binária em F. $\sim$ e $\preceq$ são definidos como $f \sim g \Leftrightarrow$ (não$f \prec g$, não $g \prec f$) e $f \preceq g \Leftrightarrow f \prec g$ ou $g \sim f$. Uma partição de S é um conjunto de eventos, cada qual não vazio, mutualmente exclusivos cuja união é igual a S.

Definição 2.6 *Seja A um evento. Dizemos que A é um* ***evento nulo*** *quando $f \sim g$ sempre que $f = g$ em A^c, em que A^c é o complemento de A.*

Na Definição 2.6, um evento será nulo quando ele não é levado em conta nas preferências do indivíduo. Sempre que dois atos forem iguais no complemento de A estes atos serão indiferentes entre si, mesmo que a conseqüência em A de f seja muito boa (ruim) quando comparada com a conseqüência de g neste mesmo evento. Podemos afirmar que este evento é considerado como impossível na percepção do agente.

Fica subentendido por esta definição que a igualdade da conseqüência de dois atos em S ($f = g$ em S) implica que estes atos são indiferentes[8] ($f \sim g$).

Uma outra hipótese implícita nesta definição é que o indivíduo não confunde, nas suas preferências, estados devido aos atos. Hipótese equivalente a feita para que a ação não atrapalhe a percepção de estado quando é avaliada igualdade entre atos, agora porém ao invés de igualdade matemática, as preferências é que estão sendo avaliadas.

[7]No modelo de Savage, toda incerteza precisa estar descrita pelo estado de natureza. Esta hipótese será discutida com mais detalhes em algumas ocasiões, em particular quando apresentarmos o axioma 6.

[8]Os axiomas 2, 4 e 7, citados adiante no texto, serão conjuntamente responsáveis por esta afirmação.

Definição 2.7 *$x \prec y \Leftrightarrow f \prec g$ quando $f = x$ e $g = y$ em S.*

A Definição 2.7 é relação de preferência sobre X. Esta definição é necessária porque conhecemos somente a relação sobre F e não sobre X. É importante ficar claro que não existe ainda restrições sobre as preferências entre x e y em cada estado. Pode ser que $x \prec y$ em s_1 e $y \prec x$ em s_2 e ainda assim, $x \prec y$ dado S. O Axioma 3, adiante no texto, excluirá esta possibilidade.

Definição 2.8 *Definimos a relação entre conseqüência e ação como: $x \prec f \Leftrightarrow g \prec f$ quando $g = x$ em S e definições similares seguem para $x \sim y$, $f \sim y$, $x \preceq g$ e assim por diante.*

A partir de agora passaremos a introduzir, junto com as demais definições, os axiomas do modelo de Savage (Axiomas 1-7) para este novo ambiente.

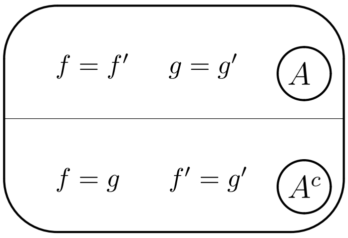
Axioma 1 *$\preceq$ em F é completa e transitiva*

O Axioma 1 é a tradicional suposição de racionalidade.

Axioma 2 *($f = f'$ e $g = g'$ em A, $f = g$ e $f' = g'$ em A^c)$\Rightarrow$($g \prec f \Leftrightarrow g' \prec f'$)*

O Axioma 2 é conhecido como *Sure thing principle* e é um dos axiomas centrais do modelo. Ele nos diz que quando fazemos duas comparações entre dois atos, levamos em consideração, em nossas preferências, a parte do ato relacionada ao evento em que as conseqüências se diferenciam (Note que f' e f se diferenciam respectivamente de g' e g somente em A). Uma das funções mais importantes deste axioma é determinar uma parcela de independência entre ato e a probabilidade de um estado ocorrer.

No diagrama abaixo podemos verificar esta afirmação observando que se $g \prec f$ então g' não pode alterar a probabilidade de A ocorrer de tal forma que $f' \prec g'$. Uma vez que os eventos estão fixados, o que determina a preferência entre estes atos é unicamente a conseqüência.



$$g \prec f \Leftrightarrow g' \prec f'$$

Esta hipótese implica que mesmo que a conseqüência de dois atos seja muito boa (ruim) em um determinado evento (em A^c), ainda assim o indivíduo leva em consideração o que acontece nos outros eventos (em A): **A importância da ocorrência de um evento não muda devido ao ato e suas conseqüências.**

Definição 2.9 *Definimos preferência condicional como:* $f \prec g$ *dado* $A \Leftrightarrow f' \prec g'$ *sempre que* $f' = f$ *e* $g' = g$ *em* A *e* $f' = g'$ *em* A^c

Para as demais relações derivamos de maneira similar. Como é facilmente observável, preferência condicional é bem definida devido ao o Axioma 2 acima.

Definição 2.10 *Definimos a relação de verossimilhança de eventos,* $\prec^\star$*, no conjunto das partes de* S *como:*

$$A \prec^\star B \Leftrightarrow f \prec g$$

sempre que ($x \prec y$, $f = y$ *em* A, $f = x$ *em* A^c, $g = y$ *em* B, $g = x$ *em* B^c)

Novamente, assim como foi definida a relação de preferência para o conjunto X, definimos uma relação binária sobre S a partir das preferências sobre F. Sua interpretação é bastante simples: $A \prec^\star B$ significa que B "tem mais chances de acontecer que" A. Esta definição de relação de verossimilhança depende da suposição de que a escolha entre f e g (como definidos em 2.10) nada mais é que a percepção de probabilidade, uma vez que a única diferença entre eles é a distribuição de suas conseqüências (iguais) em eventos diferentes. Os axiomas de Savage tentam garantir que isto é fundamentalmente o que resta quando observamos a ordenação de preferências entre f e g (como definidos em 2.10), além de impor restrições adicionais para que a função que represente esta ordenação possa ser chamada de "probabilidade".

Axioma 3 *(A não nulo, $f = x$ e $g = y$ em A)$\Rightarrow$($f \prec g$ dado $A \Leftrightarrow x \prec y$)*

O Axioma 3 diz que as preferências sobre as conseqüências não dependem do estado de natureza. Como acabamos de citar, um dos objetivos do teorema de Savage é definir uma função de probabilidade a partir de uma relação de verossimilhança sobre o conjunto das partes de S. Este axioma é fundamental para que esta relação de verossimilhança seja bem definida. Caso a preferência sobre duas conseqüências dependa do estado de natureza, não podemos afirmar se um ato é preferido a outro (atos como definidos em 2.10) devido à percepção de verossimilhança ou se é devido à dependência da preferência aos estados de natureza. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1 *Uma pessoa está escolhendo uma sobremesa, ela possui duas opções: torta de chocolate ou de limão. Vamos supor que cada doce pode estar bem feito (bf) ou mal feito (mf), assim podemos definir 4 estados de natureza como: s_1=(bf,bf), s_2=(bf,mf), s_3=(mf,bf) e s_4=(mf,mf), em que a primeira entrada do vetor é o estado de natureza da torta de chocolate e a segunda o estado da torta de limão. Uma ação é a escolha do doce: f="comer torta de chocolate" e g="comer torta de limão". Vamos assumir que as conseqüências são: x_1 =(comer torta de chocolate) e x_2 =(comer torta de limão), desta forma, $f = x_1$ em S e $g = x_2$ em S.*

Considere que uma pessoa qualquer prefira torta de chocolate estritamente a torta de limão sempre que a torta de chocolate estiver bem feita porém sempre prefere estritamente torta de limão (bem ou mal feita) quando a torta de chocolate não está bem feita, ou seja:

$$g(s_i) \prec f(s_j) \quad \textit{para } i = \{1,2,3,4\} \textit{ e } j = \{1,2\}$$

e

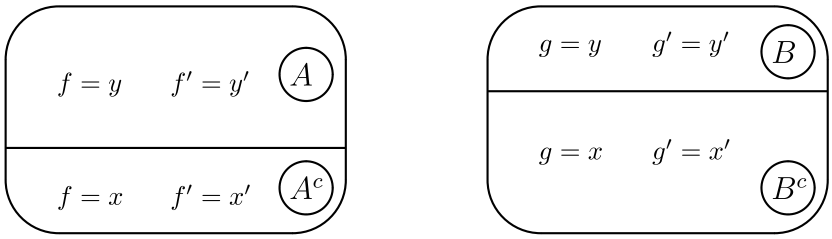
$$f(s_j) \prec g(s_i) \quad \textit{para } i = \{1,2,3,4\} \textit{ e } j = \{3,4\}$$

Claramente este é um típico exemplo de preferências que dependem do estado de natureza pois a conseqüência é constante (é idêntica no mesmo ato) porém as preferências são alteradas quando os estados variam. Para descobrirmos a percepção de probabilidade do agente, segundo a Definição 2.10, poderíamos perguntar qual a preferência revelada entre os atos: $f' = x_1$ e $g' = x_2$ no evento "torta de chocolate bem feita" e $f' = x_2$ e $g' = x_1$ no evento "torta de chocolate mal feita". Neste caso $g' \prec f'$, mas não podemos afirmar que a probabilidade da torta de chocolate estar bem feita é maior na percepção do agente, uma vez que f' domina g' pois as preferências variaram entre estados de natureza.

Axioma 4 *[($x \prec y$, $f = y$ em A, $f = x$ em A^c, $g = y$ em B, $g = x$ em B^c) e ($x' \prec y'$, $f' = y'$ em A, $f' = x'$ em A^c, $g' = y'$ em B, $g' = x'$ em B^c)$\Rightarrow$($f \prec g \Leftrightarrow f' \prec g'$)]*

O Axioma 4 é responsável pela racionalidade da relação de verossimilhança entre os eventos.

Como no Axioma 2 um diagrama facilita a interpretação:



$$f \prec g \Leftrightarrow f' \prec g'$$

Em particular, podemos perceber que caso este axioma não seja satisfeito, $f \prec g$, pela Definição 2.10 implica $B \prec^\star A$ (ou $A^c \prec^\star B^c$) enquanto que se $g' \prec f'$ teremos $A \prec^\star B$, e a relação de verossimilhança não seria racional. Por outro lado, caso a relação de verossimilhança seja assumida racional, a não satisfação deste axioma levaria a conclusão que o ato altera a percepção de probabilidade. Podemos afirmar então, que o Axioma 4 conta também, como o Axioma 3, com a afirmação que o ato não altera a percepção de probabilidade.

Axioma 5 *$x \prec y$ para algum $x, y \in Z$*

O Axioma 5 garante que S é um evento não nulo, retirando o trivial.

Axioma 6 *($f \prec g, x \in Z$)$\Rightarrow$ existe uma partição finita de S tal que, se A é um evento qualquer da partição, então ($f' = x$ em A, $f' = f$ em A^c)$\Rightarrow$ $f' \prec g$, e ($g' = x$ em A, $g = g'$ em A^c)$\Rightarrow$ $f \prec g'$*

O Axioma 6 é um axioma técnico. Sua função também é permitir que seja bem definida uma medida de probabilidade sobre o conjunto das partes de S. A interpretação seria que é possível particionar S de tal forma que cada partição terá probabilidade igual a zero na percepção do agente, ou seja, será um evento nulo.

Este axioma, implicitamente, impõe duas restrições: primeiro, o estado de natureza tem que ser uma descrição "fina" da realidade, como um estado é um conjunto de características que resolvem incertezas, então cada característica tem que ser detalhada o suficiente para que a diferença entre estados seja mínima e não tenha impacto algum sobre as preferências em F, e segundo, em seu papel arquimediano, exige que uma conseqüência não possa ser muito boa ou muito ruim a ponto de que todas partições possíveis possuírem **sempre** elementos não nulos.

Uma indagação comum aqui seria sobre porquê são utilizados exemplos do tipo "cara e coroa" no modelo de Savage, quando este estado não admite partições. Uma forma de criar partições para este tipo de exemplo seria supor que uma seqüência de inúmeros lançamentos de moeda serão realizados, cada resultado desta seqüência de lançamentos pode ser interpretado como uma partição e "cara" seria o evento: "todas as seqüências de cara e coroa em que o primeiro lançamento é igual a cara".

Axioma 7 *($f \prec g(s)$ dado A, para todo $s \in A$)$\Rightarrow$ $f \preceq g$ em A.($g(s) \prec f$ dado A, para todo $s \in A$)$\Rightarrow$ $g \preceq f$ em A.*

O Axioma 7 é conhecido como Monotonicidade Uniforme, afirma que se cada conseqüência de uma ação g (de cada estado simples), de maneira independente, seja preferível à outro ato f em um evento A (comparamos cada ponto de g em A com todo f em A), então g tem que ser ao menos tão bom quanto f. Isto expande o conceito do *sure thing principle* do Axioma 3 para estes demais atos definidos no axioma. Novamente as conseqüências determinam as preferências dado um evento, reforçando as afirmações: "Uma ação não afeta probabilidades de um evento" e "O que não é referente a preferências em X é referente a relação de verossimilhança em S". Este axioma será o principal responsável pela limitação da utilidade sobre F, e assim, pela expansão da representação para todo o domínio de F.

2.1 Utilidade Esperada Subjetiva

Nesta seção explicitamos o Teorema de Savage, que será utilizado para a construção do resultado principal. Discutimos brevemente seus principais resultados.

Para a exposição deste teorema considere que θ não possui efeito nenhum sobre as conseqüências, ou seja, podemos considerar que todas as conseqüências são perfeitamente descritas ou que apenas restam as conseqüências em que a parte não descrita é nulo.

Teorema 2.1 (Utilidade Esperada Subjetiva) *Suponha que os Axiomas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 sejam satisfeitos para qualquer f, g, f', $g' \in F$, A, $B \subseteq S$, e, x, y, x', $y' \in X$. Então existe uma única medida de probabilidade $P^\star$, definida no conjunto das partes de S, e uma função limitada $u : X \to R$ tal que:*

$$f \prec g \Leftrightarrow E[u(f(s)), P^\star] < E[u(g(s)), P^\star]$$

para todo f, $g \in F$
e u único a transformações positivas afim.

O teorema, implica que os axiomas 1 a 7 são suficientes para que o agente possua uma única probabilidade subjetiva e utilize uma utilidade esperada para tomar decisões.

Através da definição de probabilidade subjetiva do modelo de Savage, o modelo indica uma maneira simples de encontrar a relação de verossimilhança entre dois eventos A e B, permitindo assim fazer afirmações sobre a probabilidade associada a estes eventos.

De acordo com a Definição 2.10, basta escolhermos dois atos, f e g, definidos com as mesmas conseqüências, estas porém alocadas em eventos diferentes em cada ato:

Seja $y \prec x$ e os atos $f(A) = x$ e $f(A^c) = y$ e $g(B) = x$ e $g(B^c) = y$, representados abaixo:

$$f(A) = x \qquad\qquad g(B) = x$$

$$f(A^c) = y \qquad\qquad g(B^c) = y$$

As escolhas entre f e g podem ser interpretadas como "uma aposta em A" ou uma "aposta em B", se então o indivíduo revelar $g \prec f$, podemos afirmar que $B \prec^\star A$ e desta forma observamos $P^\star(B) < P^\star(A)$.

O modelo de Savage fundamenta o modelo de utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern [16], pois o mesmo critério para tomar decisões é utilizado (Utilidade Esperada), porém agora não se exige que o agente ordene preferências sobre loterias nem que a probabilidade seja objetiva e exógena.

A prova do teorema de Savage não será apresentada aqui[9].

2.2 Utilidade Esperada Subjetiva com Descrição Imperfeita das Conseqüências

Considerando a conseqüência não descrita como não nula, apresentaremos agora 3 axiomas adicionais para este novo ambiente. Estes axiomas determinarão relações comportamentais e técnicas entre os dois tipos de conseqüências (w e θ). No resultado principal, o Teorema 2.2, exigiremos que os axiomas 1 a 7 de Savage sejam satisfeitos para todas as *ações* e uma representação em forma de Utilidade Esperada

[9]Esta prova pode ser encontrada em Savage [15] ou uma versão mais compacta em Fishburn [5].

é garantida para este conjunto F[10] , porém não conseguimos observar as interações entre w e θ e mesmo quando x satisfaz tais axiomas esta interação pode gerar viés na relação de verossimilhança e/ou levar a falsa conclusão que os axiomas não estão sendo satisfeitos. Os axiomas adicionais vão garantir que os *atos* definidos em W satisfaçam os axiomas de Savage de maneira direta, permitindo isolar o efeito de θ do problema. Esta abordagem gera uma probabilidade que possui uma interpretação mais bem definida.

Axioma 8

(i) $\{g_\theta, g_w\} \preceq \{f_\theta, g_w\} \Leftrightarrow \{g_\theta, f_w\} \preceq \{f_\theta, f_w\}$ *para qualquer* $f_w,\ g_w \in W$

(ii) $\{f_\theta, g_w\} \preceq \{f_\theta, f_w\} \Leftrightarrow \{g_\theta, g_w\} \preceq \{g_\theta, f_w\}$ *para qualquer* $f_\theta,\ g_\theta \in \Theta$

O Axioma 8 impõe independência entre a parte descrita e não descrita da conseqüência. Devido a ele podemos avaliar de maneira independente relações de preferências racionais (bem definidas) nos conjuntos F_w e F_Θ. Este axioma implica que precisamos descrever f_w de tal forma que não exista ato oculto que altere a ordem de preferência. Como observamos w, podemos verificar se existe uma relação de preferências sobre F_w. Quando associamos f_w a uma ação podemos verificar o que muda nas preferências quando este processo ocorre e identificar se existe conseqüência oculta. O exemplo abaixo esclarece este ponto:

Exemplo 2.2 *Suponha agora que a ação f seja "apostar na loteria federal" e g seja "apostar no jogo do bicho" ambos seguem o sorteio da loteria federal, f paga 1000 caso A ocorra e 0 caso contrário e g também paga 1000 caso A ocorra e 0 caso contrário.*

[10]Uma vez que os axiomas que vamos introduzir restringem o domínio, os Axiomas 1 a 7 de Savage não serão suficientes para garantir para garantir esta representação.

Neste exemplo podemos escrever os atos como:

$$f_w(A) = 1000 \qquad g_w(A) = 1000$$

$$f_w(A^c) = 0 \qquad g_w(A^c) = 0$$

O Axioma 8 implica primeiro que f_w e g_w são indiferentes pois dado que a aposta é na loteria federal dois jogos (atos) iguais são indiferentes e o mesmo é válido dado que apostamos no jogo do bicho, mesmo que a ação f seja preferida a ação g ($g \prec f$). O Axioma 8 também implica que, dado que a aposta foi na loteria federal, se o indivíduo considera que receber o valor de 1000 é melhor que receber o valor de zero, então, caso aposte em uma loteria ilegal, receber 1000 continuará sendo melhor que receber zero.

Devido à este axioma de independência podemos definir relações de preferências sobre F_W e F_Θ como:

Definição 2.11

(i) Definimos $\prec_\Theta$ como: $f_\theta \prec_\Theta f_\theta \Leftrightarrow (f_\theta, f_w) \prec (g_\theta, f_w)$ para algum $f_w \in F_w$.

(ii) Definimos $\prec_{f_w}$ como: $f_w \prec_{f_w} g_w \Leftrightarrow (f_\theta, f_w) \prec (f_\theta, g_w)$ para algum $f_\theta \in F_\Theta$.

Segundo esta definição podemos avaliar de maneira independente o que foi descrito e o que não foi descrito. No Exemplo 2.2 da loteria acima, podemos avaliar se 1000 é melhor do que 0 sem precisar conhecer o tipo de loteria, podemos também avaliar que apostar em um jogo legalizado é melhor que apostar em um jogo ilegal[11] independente do valor do prêmio (e de fato podemos!).

Este axioma não permite com que seja definida ainda uma relação de verossimilhança porque θ pode estar variando entre estados de natureza. Mesmo separando que 1000 é melhor que 0 no exemplo acima não podemos avaliar se perder em uma loteria ilegal gera a mesma conseqüência oculta que ganhar em uma loteria ilegal.

[11] No Brasil o jogo do bicho é ilegal.

Considere por exemplo que o jogo somente ocorre na loteria ilegal e que queremos saber qual a percepção do agente quanto a probabilidade de A e a probabilidade de seu complemento ocorrer (A^c). Considere que g_w é como definido no Exemplo 2.2 acima e defina g'_w como: $g'_w(A) = 0$ e $g'_w(A^c) = 1000$, como abaixo:

$$g_w(A) = 1000 \qquad\qquad g'_w(A) = 0$$

$$g_w(A^c) = 0 \qquad\qquad g'_w(A^c) = 1000$$

Agora estamos supondo que as conseqüências ocultas são as mesmas pois os atos estão associados ao mesmo tipo de ação, "jogar na loteria ilegal". Caso $g_w \prec g'_w$, podemos ter uma tendência a afirmar que $A \prec^\star A^c$. Porém se a conseqüência oculta variou entre estados de natureza, isto pode na verdade implicar que a pessoa se sente melhor com a conseqüência ocorrendo em A do que com conseqüência ocorrendo em A^c, ou seja, receber 0 em A pode ser bem melhor que receber 0 em A^c e receber 1000 em A também pode ser bem melhor que receber 1000 em A^c, ao ponto que, por exemplo receber 0 em A pode ser indiferente a receber 1000 em A^c. Uma escolha pelo ato g'_w pode na verdade estar refletindo aversão ao risco, uma vez que a pessoa acha que se trata da mesma coisa caso qualquer um dos estados ocorra. Claro que para este exemplo, a não ser que a pessoa goste muito de um bicho, talvez não seja muito razoável que a indiferença ocorra, mas qualquer diferença nas preferências vão refletir o que deveria ser aversão ao risco na relação de verossimilhança. O Axioma 9 elimina esta possibilidade.

Axioma 9 *$f_\theta(s) = f_\theta(s')$ para qualquer $s,\ s' \in S$.*

O Axioma 9 nos diz que θ não varia, dada uma ação, entre estados de natureza. Desta forma o ato oculto nada mais é que um ato degenerado, ou seja, representa sempre apenas uma conseqüência oculta. Uma vez que θ não é observável, esta hipótese passa a ser necessária para que a probabilidade subjetiva possa ser derivada, caso contrário, não seria possível afirmar que um estado é mais provável que outro sem conhecer θ, que por definição é oculto.

Como θ não varia entre estados de natureza escreveremos θ_f ao invés de f_θ para se referir a conseqüência não descrita da ação f.

Este axioma implica então, mesmo de maneira normativa, que a conseqüência oculta ocorre simplesmente devido à escolha da ação. No Exemplo 1.2 apostar no cavalo de número 7 é melhor que apostar em outro número mesmo que nenhum dos dois cavalos seja o vencedor, se a pessoa perder apostando no 7 ela se sentirá melhor que caso ela tenha perdido com a escolha de outro cavalo (outra ação). No Exemplo 1.1, caso exista uma conseqüência oculta em favor de "fazer propaganda", a pessoa tem que se sentir melhor com esta ação mesmo que a venda não seja realizada, quando compara com não fazer propaganda e não vender (faz publicidade por lazer). No Exemplo 2.2 a única conseqüência oculta é o fato de estar apostando em um jogo legal ou em um jogo ilegal.

Os Axiomas 8 e 9 conjuntamente implicam em um tipo de independência de segundo grau. Podemos definir distribuições de probabilidades subjetivas, como em Savage, sobre W a partir da imagem inversa de f_w, como $P_{f_w}(W_1) = P^\star\{s|f_w(s) \in W_1\}$ para cada $W_1 \subseteq W$. Posteriormente podemos definir também uma relação de preferências sobre estas distribuições que satisfazem os axiomas de von Neumann Morgenstern [16]. Logo, estas preferências sobre loterias também serão independentes de θ_f. A critério de exemplo, suponha duas loterias que pagam 1000 em caso de sucesso e zero em caso de fracasso. A primeira loteria porém possui probabilidade associada a sucesso de 50%, enquanto que na segunda a probabilidade associada a sucesso seja apenas 1%. Suponha que ocorreu sucesso em ambas loterias. Seria muito razoável que 1000 recebidos na loteria com 1% de chance seja mais comemorado que 1000 em 50% de chance, independente da ação que originou estas loterias (suponha que a ação seja nula). Uma explicação para esta diferença seria que obter sucesso em uma loteria com baixa probabilidade é associado a "mais sorte", e 1000 "com sorte" é melhor que 1000 "sem tanta sorte". O Axioma 8 e 9 eliminam esta possibilidade.

Devido às Definições 2.1, 2.2 e o Axioma 9, o conjunto F pode ser representado como o produto cartesiano dos conjuntos F_w e Θ e podemos escrever:

$$F = F_w \times \Theta$$

Agora com o Axioma 8 em adição com o Axioma 9 podemos derivar a relação de verossimilhança apenas verificando se a conseqüência oculta de dois atos coincidem. Para isto primeiramente verificamos se as ações são indiferentes quando o ato é o mesmo, e depois, verificamos se as conseqüências são equivalentes em estados de natureza (ou eventos) diferentes. Somente fazendo esta verificação podemos utilizar a Definição 2.10 de maneira correta e encontrar a verossimilhança dos eventos.

Axioma 10

(i) *Para* $\forall f_w,\ g_w \in F_w$ *e* $\theta \in \Theta$, *existe* $\theta' \in \Theta$ *tal que* $\{f_w, \theta\} \sim \{g_w, \theta'\}$

(ii) *Para* $\forall \theta \in \Theta$ *e quaisquer* $g_w,\ f_w \in F_w$ *tal que* $\theta' \preceq \theta \preceq \theta''$ *e* $\{g_w, \theta'\} \sim \{f_w, \theta''\}$ *, existe* $h_w \in F_w$ *tal que* $f_w \preceq h_w \preceq g_w$ *e* $\{h_w, \theta\} \sim \{g_w, \theta'\} \sim \{f_w, \theta''\}$

(iii) *Para qualquer seqüência* $\theta_n \in \Theta$, *qualquer* $\theta \in \Theta$ *e quaisquer* $f_w,\ g_w \in F_w$ *em que* $g_w \preceq f_w$ *e:*

$$\{f_w, \theta_n\} \sim \{g_w, \theta_{n+1}\}$$

ocorre que

$$\theta_{n'} \preceq \theta \preceq \theta_{n'+1}$$

para algum $n' \in N$

O Axioma 10 é um axioma técnico. Além de permitir um conjunto abstrato infinito de conseqüências ocultas, sua principal função é permitir a existência da utilidade em Θ e posteriormente em F. O item (i) é conhecido como solução de equações. Ele nos diz que sempre podemos encontrar uma conseqüência oculta θ que compense em termos de preferências o ato (f_w). O item (ii) também seria a *soluções de equações* para o conjunto Θ mas para permitir que F_w seja limitado não exige que todos os elementos de Θ o satisfaça. O item (iii) é necessário para que todo θ seja restringido pelo item (ii) e claramente possui papel arquimediano.

Este axioma, de forma geral, exige que o conjunto das conseqüências ocultas seja tão rico quanto (e não mais que) o conjunto dos atos F_w, ou seja, existem muitas ações que geram muitos detalhes que não podem ser descritos (ou foram ignorados pelo modelador), mesmo em situações diferentes das que estamos interessados (mas sempre podem ser associadas a outros atos, lembrando que "ato" aqui quer dizer uma lista de conseqüências descritas para cada estado de natureza).

No teorema principal abaixo consideramos que os Axiomas 1 a 7 de Savage são satisfeitos em adição aos Axiomas 8, 9 e 10 apresentados neste capítulo, porém agora para o conjunto das ações apresentados aqui.

Teorema 2.2 (Utilidade Esperada Subjetiva II - Resultado Principal)

Suponha que os Axiomas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 sejam satisfeitos para qualquer $f,\ g,\ f',\ g' \in F,\ f_\theta,\ g_\theta \in F_\Theta,\ f_w,\ g_w \in F_w$. $A,\ B \subseteq S$, *e*, $x,\ y,\ x',\ y' \in X$ *em que* $X = \{w, \theta\}$ *para* $w \in W$ *e* $\theta \in \Theta$. *Então existe uma única medida de probabilidade* $P^\star$ *no conjunto das partes de* S, *uma função limitada* $u_w : X \to \Re$ *e uma função* $u_\theta : \Theta \to \Re$ *tais que:*

$$f \prec g \Leftrightarrow V(u_\theta(\theta_f), E[u_w(f_w(s)), P^\star]) < V(u_\theta(\theta_g), E[u_w(g_w(s)), P^\star])$$

para todo $f,\ g \in F$ *tal que* $f(s) = \{\theta_f, f_w(s)\}$ *e* $g(s) = \{\theta_g, g_w(s)\}$

em que para um dado $\overline{\theta_f}$:

$$V(u_\theta(\overline{\theta_f}), E[u_w(f_w(s)), P^\star]) = aE[u_w(f_w(s)), P^\star] + b$$

em que $a,\ b \in \Re$ *e para um dado* $\overline{f_w}$:

$$V(u_\theta(\theta_f), E[u_w(\overline{f_w(s)}), P^\star]) = m(u_\theta(\theta_f))$$

em que $m()$ *é uma transformação monótona.*
u_w *será único a transformações positivas afins.*
u_θ *satisfaz* ($u_\theta(\theta_f)$ *em* s)=($u_\theta(\theta_f)$ *em* s') *para qualquer* $s,\ s' \in S$ *e será único a transformações monótonas.*

Caso F_w seja considerado o conjunto das ações que podem ser bem descritas, este modelo se trata de uma generalização do Teorema de Utilidade Esperada Subjetiva, caso F, o conjunto das ações, seja considerado como os atos do modelo de Savage, este modelo seria uma expansão das aplicações do modelo de Savage, que representa aumento do poder descritivo deste teorema.

O Teorema 2.2 nos diz que podemos deixar de descrever características que sejam unicamente associadas a ação que o ato representa e ainda assim, caso os axiomas sejam satisfeitos, existirá uma única medida de probabilidade e uma função utilidade sobre ações que pondera estas utilidades de acordo com a importância do que foi deixado de ser descrito.

O modelo pode ser observado do ponto de vista do modelador: Mesmo que não seja possível o modelador descrever todas as características importantes de uma conseqüência com a finalidade de capturar uma ação, o indivíduo pode estar seguindo um modelo de Utilidade Esperada considerando uma única medida de probabilidade, porém com alguma ponderação. Do ponto de vista do indivíduo: mesmo que este não seja capaz de descrever a conseqüência de algum tipo de ação, caso o individuo perceba estes axiomas como um bom critério de decisão, a parte conhecida da conseqüência é utilizada para criar um modelo de Utilidade Esperada e pesos são considerados de acordo com cada ação compensando a falta de descrição.

Este modelo sugere ainda que como a conseqüência x não é inteiramente observável (conhecemos apenas w de $x = \{\theta, w\}$), o que podia ser considerado como um problema com os axiomas agora pode se tratar de um problema de descrição, por exemplo, caso $100 \prec 0$ em um evento A e $0 \prec 100$ em um evento B, isto não significa necessariamente que a preferência entre 100 e 0 dependem do estado de natureza mas sim que estes valores se tratam de uma má descrição (incompleta). Neste caso o que pode estar acontecendo é que a conseqüência oculta está variando entre estados de natureza e devido ao Axioma 9 este tipo de conseqüência precisa ser descrita.

A forma funcional da utilidade está generalizada. Definir uma relação mais específica demandaria um estudo detalhado sobre o comportamento dos agentes e, a não ser que seja muito claro qual formato deve ser especificado, existe uma tendência para os axiomas adicionais se tornarem extremamente técnicos o que demandaria extrema sofisticação dos agentes já em adição aos axiomas aqui apresentados. No entanto é fácil perceber que uma forma funcional aditiva ou multiplicativa (mais comuns na literatura) não contradizem os axiomas.

Quando olhamos o modelo do ponto de vista do modelador poderemos reinterpretar resultados importantes (como o paradoxo de Ellsberg), pois reavaliamos as preferências reveladas.

3 Interpretações, resultados e comparações com outros resultados e modelos

3.1 Paradoxo de Ellsberg

O modelo de Savage propõe que um individuo, mesmo que não conheça a teoria das chances da física, considera probabilidades (crenças) bem definidas no seu processo de tomada de decisão. Ellsberg [3] questionou até que ponto esta afirmação pode descrever o comportamento de escolha criando experimentos que testam os axiomas do modelo de Savage. Um deles testa o Axioma 2, e é realizado da seguinte forma:

Uma urna contém 150 bolas e não é possível observar seu conteúdo, 50 destas são vermelhas e as 100 bolas restantes podem ser pretas ou amarelas em qualquer proporção. Uma bola será sorteada da urna. É perguntado então se a pessoa acha que a bola sorteada será de cor amarela ou vermelha (preta não é uma opção, se a preta for sorteada a pessoa já perdeu). Caso a pessoa acerte ela recebe o valor de 100 e caso contrário recebe 0. Os atos I e II abaixo descrevem este tipo de escolha:

atos	vermelha	amarela	preta
I	100	0	0
II	0	100	0

Em geral as pessoas questionadas preferem I a II.

Posteriormente, a mesma aposta é sugerida mas a pessoa pode escolher entre ganhar 100 se a bola sorteada for tanto vermelha quanto preta (III) ou se a bola sorteada for tanto amarela quanto preta (IV), como abaixo:

atos	vermelha	amarela	preta
III	100	0	100
IV	0	100	100

e neste caso as pessoas, em geral, tendem a preferir IV a III.

Preferir simultaneamente I a II e IV a III contradiz o Axioma 2 de Savage, que postula que se I é preferível a II então III tem que ser preferível a IV. Ellsberg sugere que o modelo de Savage é razoável apenas em situações nas quais uma distribuição de probabilidades é facilmente observada, porém em casos onde não é muito claro como a distribuição é formada, existe um problema associado ao sistema de verossimilhança relativa dos eventos: Ao preferir I a II segundo a definição de verossimilhança do modelo de Savage, podemos afirmar que a probabilidade subjetiva da bola vermelha ocorrer não pode ser menor que a probabilidade da bola amarela ocorrer, porém ao preferir IV a III significa que exatamente o contrário ocorre, uma vez que a probabilidade da bola preta ocorrer é a mesma em ambos casos. E isto gera uma contradição com a existência de uma *única* distribuição de probabilidades subjetiva quando a preferência por estas apostas é estrita (e em geral ela o é).

Além de realizar seu experimento com diversos grupos de pessoas, Ellsberg testou economistas conhecidos que possuem um conhecimento sofisticado sobre probabilidades. As respostas variam: Alguns, como G. Debreu, R. Schlaiffer e P. Samuelson, não entraram em contradição pois ao invés de seguirem suas intuições tendem a aplicar os axiomas para determinar suas escolhas, já outros, como J. Marschak e N. Dalkey, violam os axiomas e não se arrependem mesmo quando são avisados sobre a contradição, e outros, como H. Raiffa, discordam com os axiomas intuitivamente porém se arrependem e reavaliam o problema observando os axiomas. Ellsberg aponta que muitos que reavaliaram o problema a luz dos axiomas decidiram manter suas escolhas originais e entre estas pessoas se encontra o próprio Savage. De qualquer forma, Ellsberg concluí:

"Respostas de violadores confessos dos axiomas indicam que a diferença (solução da contradição) não será encontrada em termos dos dois fatores comumente usados para determinar uma situação de escolha, o desejo relativo sobre os possíveis pay-offs e a relativa verossimilhança dos eventos que os alteram, mas sim em uma terceira dimensão do problema de escolha: A natureza da informação de cada um em relação a relativa verossimilhança dos eventos..."

Ellsberg sugere que existem incertezas que não se tratam de risco, direcionando para um segundo grau de incerteza: Na primeira aposta do experimento, existe mais *certeza* sobre a probabilidade da bola vermelha ser sorteada (exatamente 1/3 de chance), que sobre a probabilidade (crença) associada a bola amarela (talvez 1/3). Além de existir incerteza sobre qual bola será sorteada (risco), no caso da bola amarela existe incerteza de quanto incerto é seu sorteio (Ambigüidade)[12].

A contribuição de Ellsberg, no efetivo papel do Axioma 2 e o seu paradoxo, levou ao desenvolvimento de modelos de decisão que comportem este tipo de escolha aparentemente contraditória. O teorema mais conhecido e possivelmente também o mais aceito foi demonstrado por Gilboa e Schmeidler[13] [6]. Em seu teorema, o individuo possui diversas distribuições de probabilidades que são associadas a eventos ambíguos (como a ocorrência de bolas amarelas) e devido a uma aversão a incerteza implicada por seus axiomas, a pior distribuição de probabilidades entre todas consideradas possíveis pelo indivíduo é utilizada para o cálculo de Utilidade Esperada e determinação da escolha.

[12]Ato ambíguo é a aposta na bola amarela ou a aposta na bola preta e vermelha, enquanto que ato arriscado é apostar na bola vermelha ou apostar na bola preta ou amarela. A definição de ambigüidade é proveniente da falta de informações para determinar de modo razoável uma probabilidade, enquanto que risco possui sua definição usual.

[13]Recentemente generalizado por Maccheroni, Marinacci e Rustichini A. [10].

Em seu resultado temos que:

$$g \prec f \Leftrightarrow min_{p \in c} E[u(g(s), P^{\star}] < min_{p \in c} E[u(f(s), P^{\star}]$$

em que C é o conjunto das probabilidades consideradas possíveis.

Este tipo de abordagem parece bastante razoável[14] e em alguns casos deve ser a solução da contradição, mas é possível que em muitas situações apenas uma distribuição de probabilidades possa estar sendo levada em consideração. Para estes casos este artigo sugere que este tipo de incerteza reflete na conseqüência de cada escolha e não necessariamente na percepção de probabilidades dos indivíduos. Abaixo reescrevemos a Definição 2.10. A Proposição 3.1.1 é então apresentada como o inicio deste argumento:

Definição 2.10 *Definimos a relação de verossimilhança de eventos, $\prec^{\star}$ no conjunto das partes de S como:*

$$A \prec^{\star} B \Leftrightarrow f \prec g$$

sempre que ($x \prec y$, $f = y$ em A, $f = x$ em A^c, $g = y$ em B, $g = x$ em B^c)

Proposição 3.1.1 *As definições (i) e (ii) são equivalentes:*

(i) Definindo $\prec^{\star}$ no conjunto das partes de S como:

$$A \prec^{\star} B \Leftrightarrow f \prec g$$

sempre que ($x \prec y$, $f = y$ em A, $f = x$ em A^c, $g = y$ em B, $g = x$ em B^c)

(ii) Definindo $\prec^{\star}$ no conjunto das partes de S como:

$$A \prec^{\star} B \Leftrightarrow f \prec j$$

[14] Os axiomas base deste modelo são os formulados por Anscombe e Aumann [1] que encontra um resultado equivalente ao de Savage, porém a conseqüência neste modelo é uma distribuição de probabilidades objetivas sobre pay-offs. A utilização deste tipo de objeto no domínio é uma das principais críticas ao modelo de von Neumann e Morgenstern [16] que não ocorre em Savage.

sempre que ($x \prec y$, $v \prec z$, $v \sim x$, $z \sim y$ $f = y$ *em* A, $f = x$ *em* A^c, $j = z$ *em* B, $j = v$ *em* B^c) *em que,* $f, g, j \in F$ *e* $x, y, z, v \in X$

Prova: Por P7 (P7 sobre o conjunto $F_w \times \Theta$*) temos que* $j \sim g$*, por transitividade* $f \prec g \Rightarrow f \prec j$.

Segundo esta proposição, não importa se levamos em consideração para definir a relação de verossimilhança conseqüências que sejam *iguais* e alocadas de maneira oposta nos eventos ou se levamos em consideração conseqüências *indiferentes* entre si também alocadas de maneira oposta. Assim, no experimento de Ellsberg podemos nos perguntar:

Receber o prêmio no valor de 100 a partir da realização da bola vermelha é indiferente a receber este mesmo pay-off na ocorrência da bola amarela?

Para tentar responder a esta pergunta voltamos ao trabalho de Ellsberg quando afirma:

"O indivíduo pode sempre se perguntar: "...Assumindo que foi ele que armou a urna, qual é a proporção de bolas que ele usou? Se ele está tentando me enganar, como será que ele vai agir? Quais são as outras apostas que ele vai me propor depois destas? Qual o tipo de resultado que ele está buscando?"..."

Mesmo que um individuo acredite que a proporção das bolas na urna seja considerada como idênticas para a tomada de decisão, as conseqüências destas escolhas podem não ser perfeitamente refletidas pelos valores monetários dos pay-offs. É difícil determinar exatamente a conseqüência que pode não estar sendo descrita, porém no Teorema 2.2 não precisamos determinar com precisão o que não é descrito. Por diversos fatores esta resposta pode não ser afirmativa:

i) Dúvidas que podem persistir após o experimento fazem parte da conseqüência: Errei a conta? Fui enganado? Foi muito azar ou pouco azar?. Uma dúvida pode ser considerada como um problema de formulação do ato, Savage aponta que ***toda incerteza*** deve ser capturada pelo estado de natureza, não é o caso aqui, uma vez que estas dúvidas não são especificadas como um estado da natureza. Por um outro lado, caso estas dúvidas não sejam solucionadas, ou seja, se o experimentador não permitir seu esclarecimento, então estas fazem parte da conseqüência e persistem independente da revelação do estado: Na escolha do ato "bola amarela" se o estado revelado for bola amarela, ainda assim o indivíduo pode se perguntar o que aconteceu durante o experimento. Esta dúvida pode ser uma conseqüência oculta negativa, independente da resolução do estado de natureza. O teorema aqui apresentado mostra que nesta situação, pode ser que apenas uma distribuição de probabilidades esteja sendo considerada e pesos diferentes para estes atos estão sendo levados em conta pelo indivíduo.

ii) Se o indivíduo escolher apostar na bola amarela ele sabe que o experimentador, por conhecer a proporção de bolas na urna, sabe se a escolha foi boa ou não (antes do próprio agente). Isto não parece ser muito agradável. Já ao apostar na bola vermelha, a pessoa pode acreditar que a resolução do problema independe da escolha do experimentador ao preparar a urna, o que aparenta ser mais confortável.

iii) Em geral ao se propor um critério aleatório para decidir em qual bola escolher as pessoas passam a ser indiferentes entre este processo aleatório e a escolha por uma opção arriscada.[15] Para este exemplo uma forma equivalente de apresentar este tipo de escolha seria: Suponha que uma bola já foi sorteada mas não é possível determinar sua cor. Sabemos que esta com certeza é preta, amarela ou vermelha. Uma moeda então é lançada e caso o resultado seja cara a aposta é na bola vermelha, em caso de coroa a aposta é na bola amarela. Estudos empíricos indicam que as pessoas são indiferentes entre este tipo de escolha e apostar na bola vermelha. Este resultado sugere que a responsabi-

[15]Ver Raiffa [14]

lidade da escolha na determinação do resultado é uma possível conseqüência oculta. Se a escolha for determinada de maneira aleatória (como através do lançamento de uma moeda) então ganhar ou perder não tem relação com a sua decisão de escolha e ao se escolher a bola vermelha aparentemente o resultado depende menos da escolha.

No caso do paradoxo de Ellsberg, os axiomas propostos neste artigo parecem ser satisfeitos, porém isto é difícil de ser observado com este experimento pois a ação ambígua e arriscada parecem ser a mesma. Para ficar claro este ponto vamos considerar um outro experimento que Ellsberg realizou: Considere duas urnas, a primeira chamada de "urna arriscada" possui 50 bolas pretas e 50 bolas brancas, e a segunda urna a "urna ambígua" também possui 100 bolas pretas ou brancas porém em proporção desconhecida. Na primeira aposta o agente escolhe qual urna ele quer que seja sorteada a bola preta. Em geral, a urna arriscada é escolhida, o que sugere que a probabilidade de uma bola preta ser sorteada na urna ambígua é menor ou igual que a probabilidade da bola preta ser sorteada na urna arriscada (50%). A segunda aposta pergunta qual urna o agente gostaria que a bola branca agora fosse sorteada. Em geral a urna arriscada também é escolhida. Em caso de preferência estrita por estas escolhas nas duas apostas temos uma contradição na relação de verossimilhança e não é possível determinar uma probabilidade única para o sorteio das bolas na urna ambígua. Nos deparamos com o mesmo problema do experimento anterior.

Neste experimento o agente escolhe entre urnas diferentes. Podemos determinar uma ação como "apostar na urna arriscada" e outra como "apostar na urna ambígua". Para a aposta em cada urna a conseqüência oculta deve persistir independente do estado de natureza (a urna ambígua sempre entregará uma conseqüência ambígua independente do estado de natureza).

Podemos concluir que o Teorema 2.2 aqui apresentado comporta este paradoxo. Como os atos de cada ação, ambígua ou arriscada, são os mesmos, ao tratarmos ambigüidade como uma conseqüência oculta, a escolha por uma ou outra ação reflete unicamente uma ponderação sobre o que a ambigüidade representa para cada pessoa. Não é preciso determinar do que se trata a ambigüidade em termos de conseqüências. Precisamos somente nos questionar se a ambigüidade persiste independente da resolução do estado de natureza e antes do processo decisivo (quando é possível fazer perguntas a respeito da característica da escolha).

Não é possível determinar com exatidão até que ponto ambigüidade é um problema de conseqüência, como apresentado neste artigo, ou se trata de uma sofisticação adicional da probabilidade levada em consideração para a determinação da escolha como em Gilboa e Schmeidler [6]. O conceito de ambigüidade é extremamente amplo para comportar ambos casos, possivelmente de maneira simultânea.

3.2 Aversão ao Risco

Em modelos em que a representação das preferências é dada por uma Utilidade Esperada, em que muitas vezes a conseqüência é um valor monetário, a diferença da utilidade das conseqüências passa a ter importância. Isto ocorre porque não apenas exigimos ordenação de pay-offs, como também assumimos ordenação sobre todas as loterias sobre estes pay-offs. Considere 3 prêmios, os valores \$1, \$2 e \$4. Respectivamente cada um destes pay-offs são representados pelas loterias degeneradas (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1) e suponha que suas respectivas utilidades (bernoulli) são: $u(\$1) = 1$, $u(\$2) = 2$ e $u(\$4) = 4$. Considere agora duas loterias L_1=(0.25,0.5,0.25) e L_2=(0.1,0.7,0.2) é fácil observar que:

$$U(L_1) = 0.25(1) + 0.5(2) + 0.25(4) = 2.25 <$$

$$U(L_2) = 0.1(1) + 0.7(2) + 0.2(4) = 2.3$$

$$logo, \quad L_1 \prec L_2$$

Porém ao promovermos uma transformação monótona sobre u, alterando de maneira não proporcional a diferença entre as utilidades como, por exemplo: $u'(\$1) = 1$, $u'(\$2) = 2$ e $u'(\$4) = 8$ teremos que:

$$U'(L_1) = 3.25 > U(L_2) = 3.1$$

e a preferência sobre L_1 e L_2 se inverteria ($L_2 \prec L_1$) logo, uma alteração monótona não preserva diferenças de utilidade de maneira proporcional (apenas uma transformação afim possui esta propriedade) e não mais estaremos representando a mesma relação de preferência. Desta forma, podemos concluir que uma ordenação de preferências em um ambiente rico (como o das loterias), que demanda certa sofisticação do agente, nos leva a uma quantidade maior de informações sobre o comportamento de um indivíduo representado na função utilidade (de certa forma, a diferença entre utilidade, que tem papel fundamental para a representação ordinal das loterias não degeneradas, acaba implicando em uma propriedade cardinal das loterias degeneradas). Podemos assim criar conceitos como o de aversão ao risco, prêmio de risco, certeza equivalente, prêmio de probabilidades entre outros.

No modelo de Savage é possível fazer estas mesmas afirmações pois seu modelo também se trata de um modelo de Utilidade Esperada e se resume ao modelo de von Neumann Morgenstern [16], porém agora as probabilidades são subjetivas e endógenas, ao invés de objetivas e exógenas.

O resultado principal deste artigo, o Teorema 2.2, implica que existe uma Utilidade Esperada para cada conjunto de ações que geram a mesma conseqüência oculta. Logo, no caso da conseqüência oculta existir, quando comparamos duas distribuições de probabilidades existem informações adicionais sobre a ação que a gerou que podem ser importantes. Não somente é importante a ordenação de preferências sobre estas distribuições (que são idênticas para cada conseqüência oculta), como também passa a ser importante a maneira e o processo que esta foi gerada, que possivelmente é determinante de conseqüências não observadas ou não descritas.

Este resultado do modelo leva a conclusão que pode existir viés sobre o cálculo de aversão ao risco[16] utilizadas em modelos de utilidade esperada, pois parte da aversão pode ser atribuída a uma diferença da ação ao invés de unicamente a percepção de probabilidade. Por exemplo: No modelo de utilidade esperada convencional existe uma contradição em assumir que a curva de utilidade apresenta aversão ao risco por toda sua extensão[17] e o comportamento de um mesmo indivíduo que faz seguro total de um automóvel ao mesmo tempo que aposta em uma loteria. Fazer seguro de carro implica em aversão ao risco, enquanto que apostar em uma loteria implica em comportamento de amante de risco, no entanto é bastante comum as pessoas terem este tipo de comportamento.

O modelo apresentado aqui permite que a curva de utilidade monetária seja totalmente côncava e ainda assim pode explicar estas escolhas: Apostar em uma loteria é bastante diferente de fazer um seguro, pode ser incorreto comparar diretamente suas distribuições de probabilidades, sem levar em consideração conseqüências que estão associadas a estas ações e não são capturadas pelo valor monetário descrito. Ganhar em uma loteria pode não ser associado somente a possíveis cestas de bens que passam a ser disponíveis dada a menor restrição orçamentária.[18] Acensão social pode ser vista com outros benefícios que não são necessariamente comprados. Já fazer seguro de carro, inclui outros benefícios que não sejam apenas o valor do automóvel.[19]

Na seção anterior vimos que o paradoxo de Ellsberg pode ser comportado ao considerar preferências ocultas. O paradoxo, no entanto, pode levantar uma nova

[16] O conceito de aversão ao risco passa a ser diferente da definição de aversão ao risco. E conseqüentemente dos demais conceitos derivados também sofrem do mesmo efeito.

[17] Que é equivalente a assumir utilidade marginal decrescente do valor monetário.

[18] Por definição a utilidade de um valor monetário é considerada a utilidade indireta.

[19] Inclusive podemos questionar a aversão ao risco mesmo dentro da escolha entre fazer seguro ou não: Se a pessoa faz seguro ela sempre terá um carro enquanto que se ela não faz ela terá ou não o carro, normalmente o efeito de ter o carro em si não é considerado, e como a pessoa preferiu comprar o carro ao invés de manter o valor monetário isto implica que existe uma utilidade adicional em possuir o carro (ao invés de manter o dinheiro). Talvez o correto em termos de aversão ao risco seria não assumir o valor zero caso o carro seja roubado mas sim um valor negativo quando a pessoa não faz seguro.

questão. O *equity premium puzzle*, paradoxo encontrado por Mehra e Prescott [13], se trata de um problema considerado por muitos economistas como não resolvido pela teoria econômica. A taxa de retorno que um ativo de risco paga quando comparado com com a taxa de um retorno de um ativo considerado sem risco, como o título do tesouro americano, exigiria uma aversão ao risco extremamente alta e não razoável para ser sustentada. Como para um ativo de risco não existe uma distribuição de probabilidades objetiva sobre retornos que possa ser explicitada, isto significa que pode haver ambigüidade que não é levada em consideração no problema, o que gera um prêmio de incerteza (incerteza de segundo grau sobre a distribuição de probabilidades) para estes tipos de ativos. Assim, considerando que não existe ambigüidade no investimento de um título do tesouro, podemos afirmar que cada portfólio se trata de uma ação diferente, gerando conseqüências diferentes (como ambigüidade). O problema não seria com a aversão ao risco, pois agora as diferentes ponderações usadas para classificar a distribuição de probabilidades provinda de cada tipo de ativo podem explicar esta diferença.

Em situações nas quais as loterias são geradas de modo bastante similar, a aversão ao risco continua sendo uma medida razoável de comportamento.

Podemos concluir que, se a probabilidade é resultado de ações muito diferentes, devemos tomar maior cuidado ao avaliar a aversão ao risco, ou melhor, devemos tomar cuidado para que a definição usada não camufle o conceito de aversão ao risco e como gostamos de interpretá-lo. Esta pode estar capturando outros fatores indesejáveis para definir o comportamento perante ao risco, e eventualmente nos levar a conclusões desastrosas. A sensibilidade da ordenação de loterias para a determinação deste conceito faz com que este ponto seja ainda mais relevante.

4 Conclusões

Foi apresentado neste artigo que um cálculo de Utilidade Esperada pode estar sendo levado em conta decisão dos indivíduos mesmo quando não explicitamos todas as conseqüências de cada ação. Para este fim, assumimos uma relação binária sobre um conjunto de ações em que suas conseqüências são representadas por duas dimensões, a parte descrita (que ao ser associada a estados de natureza chamamos de ato) e a parte oculta. A representação destas preferências é dada por um funcional que possui utilidade esperada sobre atos e considera uma ponderação quando a conseqüência não captura de maneira precisa o resultado de uma ação, esta ponderação depende da parte não descrita da ação que pode ser interpretada de diversas formas.

Para a obtenção de tal resultado três axiomas adicionais aos axiomas de Savage foram introduzidos. Um axioma de independência entre a parte oculta e a parte descrita da conseqüência, um axioma que associa a parte oculta da conseqüência apenas a ação e um terceiro axioma técnico, com papel arquimediano, que permite considerar infinitas conseqüências ocultas.

Este resultado permite concluir que diversos problemas muitas vezes associados a axiomatização do modelo de Savage podem se tratar de um problema de descrição e deixam de ser inconsistentes com a axiomatização apresentada aqui (como o paradoxo de Ellsberg), aumentando o poder descritivo do modelo de utilidade esperada.

Uma discussão sobre o paradoxo de Ellsberg e aversão ao risco foi apresentada. O resultado principal deste artigo comporta o paradoxo Ellsberg e sugere que o conceito de aversão ao risco deve ser utilizado preferencialmente em situações nas quais as distribuições de probabilidades são geradas por ações ou situações similares.

5 ANEXOS

5.0.1 Existência de uma única probabilidade subjetiva e utilidade esperada em F_w

Proposição 5.1 *Sejam os Axiomas 1 a 9 satisfeitos então existe uma única medida de probabilidade $P^\star$ no conjunto das partes de S e:*

$$f_w \prec g_w \Leftrightarrow E[u_w(f_w(s)), P^\star] < E[u_w(g_w(s)), P^\star]$$

para todo $f_w,\ g_w \in F_w$
e quando u_w satisfaz tais condições será limitado e único a transformações positivas afim.

Fixe um $\theta_f \in \Theta$:

Pelo Axioma 1, para qualquer $f_w,\ g_w \in F_w$, $\{f_w, \theta_f\} \preceq \{g_w, \theta_f\}$ ou $\{g_w, \theta_f\} \preceq \{f_w, \theta_f\}$ logo, pelo Axioma 8, $f_w \preceq_{f_w} g_w$ ou $g_w \preceq_{f_w} f_w$, assim, $\preceq_{f_w}$ em F_w é completo.

Pelo Axioma 1, para qualquer $f_w,\ g_w,\ h_w \in F_w$, se $\{f_w, \theta_f\} \preceq \{g_w, \theta_f\}$ e $\{g_w, \theta_f\} \preceq \{h_w, \theta_f\}$ então $\{f_w, \theta_f\} \preceq \{h_w, \theta_f\}$ logo, pelo Axioma 8, se $f_w \preceq_{f_w} g_w$ e $g_w \preceq_{f_w} h_w$, então $f_w \preceq_{f_w} h_w$, desta forma, $\preceq_{f_w}$ em F_w é transitivo.

Assim podemos afirmar que:

Axioma 5.0.1 *$\preceq_{f_w}$ em F_w é completa e transitiva*

Pelo Axioma 2 ($\{f_w, \theta_f\} = \{f'_w, \theta_f\}$ e $\{g_w, \theta_f\} = \{g'_w, \theta_f\}$ em A e e $\{f'_w, \theta_f\} = \{g'_w, \theta_f\}$ em A^c)$\Rightarrow$($\{g_w, \theta_f\} \prec \{f_w, \theta_f\} \Leftrightarrow \{g'_w, \theta_f\} \prec \{f'_w, \theta_f\}$), devido ao Axioma 9, θ_f é idêntico em todos eventos, logo, aplicando o Axioma 8 temos que:

Axioma 5.0.2 *($f_w = f'_w$ e $g_w = g'_w$ em A, $f_w = g_w$ e $f'_w = g'_w$ em A^c)$\Rightarrow$($g_w \prec_{f_w} f_w \Leftrightarrow g'_w \prec_{f_w} f'_w$)*

Fazendo isto, de maneira trivial, para cada axioma de Savage e aplicando os Axiomas 9 e 8 chegamos que os axiomas de Savage serão satisfeitos para $\preceq_{f_w}$ em F_w, logo, podemos aplicar o Teorema 2.1 de Savage e provamos a proposição.

5.0.2 Prova da existência de Utilidade que representa $\prec_\theta$ em Θ

Esta parte da prova segue da seguinte forma: Primeiro vamos apresentar o conceito de classes de equivalência e definir uma relação de preferências $\prec'$ sobre seu conjunto. Posteriormente exibiremos a Proposição 5.2 que são condições primitivas para a existência de função utilidade sobre um conjunto, será então demonstrado que $\prec_\theta$ e o conjunto Θ satisfazem tais condições da proposição e assim, que existe uma função utilidade que representa $\prec_\theta$ em Θ.

Definição 5.1

(i) Uma classe de equivalência de um conjunto H sob $\sim$ é um subconjunto a de H tal que se $h \in a$ então $a = \{j \in H/h \sim j\}$.

(ii) a_h será o conjunto das classes de equivalência que contém h.

(iii) $H/\sim$ é o conjunto de todas classes de equivalência de H sob $\sim$.

(iv) $\prec'$ em $H/\sim$ é definido como:

$$a \prec' b \Leftrightarrow j \prec h$$

para algum $j \in a$ e $h \in b$.

Em palavras, (i) apenas define que cada classe de equivalência é um conjunto que contém todos os elementos de um conjunto que são indiferentes entre si, (ii) e (iii) são nomenclaturas e no item (iv) $\prec'$ é uma relação binária definida a partir de $\prec$ em H. A relação $\prec'$ será uma relação sobre classes de equivalência. É fácil observar que está é uma relação estrita devido à transitividade de $\preceq$ em H.

Definição 5.2 *Seja $\prec_y$ uma relação binária em um conjunto Y. Então $Z \subseteq Y$ é $\prec_y$**-ordem denso** em Y se e somente se, sempre que $(x,\ y \in Y)$, $(x,\ y \notin Z)$ e $x \prec y$, existe $z \in Z$ tal que $x \prec_y z$ e $z \prec_y y$.*

O conceito de ordem densidade sob uma relação de preferências é auto explicativo. Para qualquer elemento do conjunto $\prec'$-ordem denso existe pelo menos um elemento melhor e um elemento pior que pertence ao seu conjunto complementar. pelo menos dois elementos do seu conjunto complementar.

Proposição 5.2 *Existe uma função de valor real u em X tal que:*

$$x \prec y \Leftrightarrow u(x) < u(y) \qquad \textit{para todo } x,\ y \in X$$

se e somente se $\prec$ é assimétrico e negativo transitivo e existe um subconjunto de $X/\sim$ que seja $\prec'$-ordem denso em $X/\sim$.

Prova desta proposição pode ser encontrada em Fishburn [5]. De acordo com a Proposição 5.2 então precisamos mostrar que $\prec_\theta$ é assimétrico e negativo transitivo em Θ e que existe um subconjunto de $\Theta/\sim$ que seja $\prec'_\theta$-ordem denso em $\Theta/\sim$ para assim concluir que existe uma função u_θ em Θ representando $\prec_\theta$.

A prova de que $\prec_\theta$ é assimétrica e negativa transitiva é equivalente a demonstração que $\preceq_\theta$ é racional que por sua vez é análoga a prova feita para mostrar este resultado em $\prec_{f_w}$:

Fixe um $f_w \in F_w$:

Pelo Axioma 1, para qualquer $\theta_f,\ \theta_g \in \Theta$, $\{f_w, \theta_f\} \preceq \{f_w, \theta_g\}$ ou $\{f_w, \theta_g\} \preceq \{f_w, \theta_f\}$ logo, pelo Axioma 8, $\theta_f \preceq_\theta \theta_g$ ou $\theta_g \preceq_\theta \theta_f$, assim, $\preceq_\theta$ em Θ é completo.

Pelo Axioma 1, para qualquer $\theta_f,\ \theta_g,\ \theta_h \in \Theta$, se $\{f_w, \theta_f\} \preceq \{f_w, \theta_g\}$ e $\{f_w, \theta_g\} \preceq \{f_w, \theta_h\}$ então $\{f_w, \theta_f\} \preceq \{f_w, \theta_h\}$ logo, pelo Axioma 8, se $\theta_f \preceq_\theta \theta_g$ e $\theta_g \preceq_\theta \theta_h$, então $\theta_f \preceq_\theta \theta_h$, desta forma, $\preceq_\theta$ em Θ é transitivo.

Assim podemos afirmar que $\prec_\theta$ em Θ é assimétrica e negativo transitivo.

Resta demonstrar que existe um um subconjunto $\{\Theta'/\sim_\theta\} \in \{\Theta/\sim_\theta\}$ que seja $\prec'_\theta$-ordem denso em $\{\Theta/\sim_\theta\}$, para isto considere a seguinte proposição:

Proposição 5.3 *Se* $\{f_w, \theta\} \preceq \{g_w, \theta'\}$ *e* $g_w \prec_w f_w$ *então* $\theta \prec_\theta \theta'$

Prova da Proposição 5.3: Como $g_w \prec_w f_w$, por definição $\{g_w, \theta'\} \prec \{f_w, \theta'\}$, como assumimos que $\{f_w, \theta\} \preceq \{g_w, \theta'\}$ por transitividade $\{f_w, \theta\} \prec \{f_w, \theta'\}$ logo, pela Definição 2.11 temos que $\theta \prec_\theta \theta'$.

Agora, a partir de uma seqüência $\{\theta_n\}$ criaremos uma partição de $\{\Theta/\sim_\theta\}$ e demonstraremos que existe uma bijeção em cada elemento da partição com um subconjunto $\{f'_w \mid g_w \prec_w f'_w \preceq_w f_w\}$ qualquer e assim, poderemos afirmar que cada um destes subconjuntos possui um subconjunto $\prec'_\theta$-ordem denso.

Sejam $f_w,\ g_w \in F_w$ tal que $f_w \prec g_w$ e $a_{fw},\ a_{gw} \in \{\Theta/\sim_\theta\}$ suas respectivas classes de equivalência, sabemos que tais f_w e g_w existem devido ao Axioma 5. Seja $\{\theta_n\}$ para $n \in N$ uma seqüência em Θ tal que:

$$\{f_w, \theta_n\} \sim \{g_w, \theta_{n+1}\}$$

tal seqüência existe devido ao Axioma 10 item (i).

Considere o conjunto $\{\theta \mid \theta_{n1} \preceq_\theta \theta \prec_\theta \theta_{n1+1}\}$ para algum $\theta_{n1} \in \{\theta_n\}$, note que este conjunto coincide com o conjunto das classes de equivalência $\{b_\theta \mid b_{\theta n1} \preceq'_\theta b_\theta \prec'_\theta b_{\theta n1+1}\}$. Devido ao Axioma 10 item (i), para qualquer $f'_w \in a_{fw}$ tal que $g_w \prec_w f'_w \prec_w f_w$, existe θ' tal que $\{f'_w, \theta'\} \sim \{f_w, \theta_{n1}\}$. Como $f'_w \prec_w f_w$, pela Proposição 5.3 temos que $\theta_{n1} \prec \theta'$, como, por transitividade $\{f'_w, \theta'\} \sim \{g_w, \theta_{n1+1}\}$ e $g_w \prec_w f'_w$, pela Proposição 5.3 também temos que $\theta' \prec \theta_{n+1}$, logo: $\theta_{n1} \prec \theta' \prec \theta_{n+1}$, ou de maneira equivalente:

$$b_{\theta n1} \prec'_\theta b'_\theta \prec'_\theta b_{\theta n+1}$$

e $b_{\theta n1}$, $b_{\theta n1+1}$ são os conjuntos de classes de equivalência de θ_{n1} e θ_{n1+1}.

Se f''_w é tal que $f'_w \prec_w f''_w \prec_w f_w$, ou seja, $a_{fw'} \prec'_w a_{f''w} \prec'_w a_{fw}$, sabemos que existe θ'', em que $\{f''_w, \theta''\} \sim \{f_w, \theta_{n1}\}$ e como f''_w é tal que $f'_w \prec_w f''_w \prec_w f_w$, pelo mesmo argumento que demonstramos que θ' é tal que $\theta_{n1} \prec_\theta \theta' \prec_\theta \theta_{n+1}$ sabemos que $\theta_{n1} \prec_\theta \theta'' \prec_\theta \theta'$.

Assim para cada f', f'' que pertençam a classes de equivalência diferentes encontraremos θ', θ'' que também pertencem à classes de equivalência diferentes em $\{\theta \mid \theta_{n1} \preceq \theta \preceq \theta_{n1+1}\}$.

Desta forma, para fixados a_{fw}, a_{gw} e $b_{\theta n1}$ tal que $a_{gw} \prec'_w a_{fw}$ podemos definir a função:

$$O_{\theta_{n1}} : \{a_{f'w} \mid a_{gw} \prec'_w a_{f'w} \preceq'_w a_{fw}\} \to \{b_\theta \mid b_{\theta n1} \preceq'_\theta b_\theta \prec'_\theta b_{\theta n1+1}\}$$

como:

$$O_{\theta_{n1}}(a_{f'w}) = \begin{cases} b_{\theta'} & \text{se } a_{gw} \prec'_w a_{f'w} \prec'_w a_{fw} \\ b_{\theta n1} & \text{se } a_{f'w} = a_{fw} \end{cases}$$

em que $\{f'_w, \theta'\} \sim \{f_w, \theta_{n1}\}$.

$O_{\theta_{n1}}(.)$ além de injetora no sentido que se $a_{f'w} \prec'_w a_{f''w}$ então $O_{\theta_{n1}}(a_{f''w}) \prec'_\theta O_{\theta_{n1}}(a_{f'w})$ será sobrejetora devido ao Axioma 10 item (ii). Como Sabemos que existe u em F_w devido ao Teorema 5.1 podemos afirmar que o conjunto $\{a_{f'w} \mid a_{gw} \prec'_w a_{f'w} \preceq'_w a_{fw}\}$ possui um subconjunto que seja $\prec'_{f_w}$-ordem denso e contável, dada a bijeção $O_{\theta_{n1}}(.)$ podemos afirmar que $\{b_\theta \mid b_{\theta n1} \preceq'_\theta b_\theta \prec'_\theta b_{\theta n1+1}\}$ também possui. Como devido ao Axioma 10 item (iii):

$$\Theta = \cup_n \{\theta \mid \theta_n \preceq \theta \prec \theta_{n+1}\}$$

ou de modo equivalente:

$$\{\Theta / \sim_\theta\} = \cup_n \{b_\theta \mid b_{\theta n} \preceq'_\theta b_\theta \prec'_\theta b_{\theta n+1}\}$$

e esta é uma união contável pela definição de $\{\theta_n\}$, então também existe um subconjunto de $\{\Theta / \sim_\theta\}$, contável e $\prec'_\theta$-ordem denso. Logo, podemos afirmar que existe u_θ

que representa $\preceq_\theta$ em Θ, como queríamos demonstrar. Ainda, como sabemos que a Utilidade Esperada em F_w é contínua na topologia de ordem ($\prec_w$), podemos afirmar também que a utilidade em Θ é contínua na topologia de ordem ($\prec_\theta$) e utilizaremos este resultado.

5.0.3 Prova da existência de Utilidade que representa $\prec$ em F

Para esta prova utilizaremos a Proposição 5.2. Vamos demonstrar que o subconjunto $\{F_z/\sim\} = \{A_{\{fw,\theta f\}} \mid u_w(f_w),\ u_\theta(\theta_f) \in Q\}$ em que $A_{\{fw,\theta f\}}$ é a classe de equivalência que contém $\{f_w, \theta_f\}$ é um subconjunto contável e $\prec'$-ordem denso de $\{F/\sim\}$.

Considere que $A_{\{gw,\theta g\}} \prec' A_{\{fw,\theta f\}}$ para $A_{\{gw,\theta g\}}$, $A_{\{fw,\theta f\}} \notin F_z/\sim$. Para qualquer elemento $\{g_w, \theta_g\} \in A_{\{gw,\theta g\}}$ e $\{f_w, \theta_f\} \in A_{\{fw,\theta f\}}$, por definição $\{g_w, \theta_g\} \prec \{f_w, \theta_f\}$. Somente os seguintes casos são possíveis:

1 $g_w \prec f_w$ e $\theta_g \prec \theta_f$

2 $g_w \prec f_w$ e $\theta_g \sim \theta_f$

3 $g_w \prec f_w$ e $\theta_f \prec \theta_g$

4 $f_w \prec g_w$ e $\theta_g \prec \theta_f$

5 $g_w \sim f_w$ e $\theta_g \prec \theta_f$

Caso 1- $g_w \prec f_w$ e $\theta_g \prec \theta_f$

Para este caso sabemos que $u_w(g_w) < u_w(f_w)$ e $u_\theta(\theta_g) < u_\theta(\theta_f)$ como entre dois números reais sempre existe um racional, pela continuidade na topologia de ordem de $u_w()$ e $u_\theta()$ sabemos que existe f'_w e θ' tais que: $g_w \prec f'_w \prec f_w$ e $\theta_g \prec \theta' \prec \theta_f$, com $u_w(f')$, $u_\theta(\theta')$ pertencentes à Q. Por independência sabemos que $\{g_w, \theta_g\} \prec \{f'_w, \theta_g\} \prec \{f'_w, \theta'\} \prec \{f_w, \theta'\} \prec \{f_w, \theta_f\}$, logo, por transitividade $\{g_w, \theta_g\} \prec \{f'_w, \theta'\} \prec \{f_w, \theta_f\}$.

Caso 2- $g_w \prec f_w$ e $\theta_g \sim \theta_f$

Seja f'_w tal que $g_w \prec f'_w \prec f_w$ e $u_w(f'_w) \in Q$, devido ao Axioma 10 (i) sabemos que existe θ' e θ'' tais que

$$\{f_w, \theta_f\} \sim \{f'_w, \theta'\}$$

e

$$\{g_w, \theta_g\} \sim \{f'_w, \theta''\}$$

pela Proposição 5.3 sabemos que $\theta'' \prec \theta_f \prec \theta'$ como $u_\theta()$ é contínua sabemos que existe θ''' tal que $\theta'' \prec \theta''' \prec \theta'$ e $u_\theta(\theta''') \in Q$. Por independência (Axioma 8) $\{f'_w, \theta''\} \prec \{f'_w, \theta'''\} \prec \{f'_w, \theta'\}$, logo, por transitividade $\{g_w, \theta_g\} \prec \{f'_w, \theta'\} \prec \{f_w, \theta_f\}$.

Caso 3- $g_w \prec f_w$ e $\theta_f \prec \theta_g$

Seja h_w tal que $g_w \prec h_w \prec f_w$, em que $u_w(h_w) \in Q$ devido ao Axioma 10 (i) existe θ' e θ'' tais que:

$$\{f_w, \theta_f\} \sim \{h_w, \theta''\}$$

e

$$\{g_w, \theta_g\} \sim \{h_w, \theta'\}$$

como $\{h_w, \theta'\} \prec \{h_w, \theta''\}$ por independência $\theta' \prec \theta''$, como $u_\theta()$ é contínuo existe θ''' tal que $\theta' \prec \theta''' \prec \theta''$ e $u_\theta(\theta''') \in Q$. Por independência e transitividade $\{h_w, \theta'''\}$ é tal que $\{g_w, \theta_g\} \prec \{h'_w, \theta'''\} \prec \{f_w, \theta_f\}$.

Caso 4- $f_w \prec g_w$ e $\theta_g \prec \theta_f$

Este caso é análogo ao caso 3.

Caso 5- $g_w \sim f_w$ e $\theta_g \prec \theta_f$

Seja h_w tal que $h_w \prec f_w$ ou $f_w \prec h_w$ e $u_w(h_w) \in Q$, devido ao Axioma 5 pelo menos para um dos casos tal h_w existe. Considere o caso em que $f_w \prec h_w$. Devido ao Axioma 10 (i) sabemos que existe θ' e θ'' tais que:

$$\{f_w, \theta_f\} \sim \{h_w, \theta'\}$$

e

$$\{g_w, \theta_g\} \sim \{h_w, \theta''\}$$

Devido à Proposição 5.3 sabemos que $\theta'' \prec_\theta \theta'$. Pela continuidade de $u_\theta()$ sabemos que existe θ''' tal que $\theta'' \prec_\theta \theta''' \prec_\theta \theta'$ e $u_\theta(\theta''') \in Q$, usando independência e transitividade sabemos que $\{g_w, \theta_g\} \prec \{h_w, \theta'''\} \prec \{f_w, \theta_f\}$. Caso não exista h_w tal que $f_w \prec h_w$, sabemos que existe $h_w \prec f_w$ e a prova é análoga.

Assim, para qualquer possível caso 1 a 5 listado acima, sabemos que existe um conjunto $A_{\{f'w,\theta f'\}} \in \{F_z/\sim\}$ em que $A_{\{gw,\theta g\}} \prec' A_{\{f'w,\theta f'\}} \prec' A_{\{fw,\theta f\}}$ e $\{F_z/\sim\}$ é $\prec'$-ordem denso em $\{F/\sim\}$, como por definição $\{F_z/\sim\}$ é contável temos o resultado.

5.0.4 Forma funcional e unicidade

Agora que sabemos que existe uma função Utilidade que representa $\prec$ em F precisamos mostrar que existe $V(u_\theta(\theta_f), E[u_w(f_w(s)), P^\star])$ que representa $\prec$ em F. Como sabemos que existe $u_\theta()$ e $u_{f_w}()$ podemos definir:

Definição 5.3

$$V(u_\theta(\theta_f), u_{f_w}(f_w)) = U(\theta'_f, f'_w)$$

para U *representando* $\prec$ *em* F *e* $\theta'_f \in \{\theta | u_\theta(\theta_f) = u_\theta(\theta)\}$ *e* $f'_w \in \{h_w | u_{f_w}(f_w) = u_{f_w}(h_w)\}$

Por definição, V representa $\prec$ em F, pela proposição 5.1, $u_{f_w}() = E[u_w(), P^\star]$ então:

$$U(\theta'_f, f'_w) = V(u_\theta(\theta_f), E[u_w(f_w(s)), P^\star]) = U(\theta_f, f_w)$$

como no teorema.

Por independência e o Teorema de utilidade esperada sabemos que para um fixado $\overline{\theta_f}$ temos que:

$$V(u_\theta(\overline{\theta_f}), E[u_w(f_w(s)), P^\star]) = aE[u_w(f_w(s)), P^\star] + b$$

Por independência e o Teorema de existência de utilidade, para um fixado $\overline{f_w}$ temos que:

$$V(u_\theta(\theta_f), E[u_w(\overline{f_w(s)}), P^\star]) = m(u_\theta(\theta_f))$$

como queríamos demonstrar.

Referências

[1] **Anscombe, F. J.; Aumann, R. J. (1963):** *"A definition of subjective probability"*, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 34, pp. 199-205.

[2] **de Finetti, B. (1937):** *"La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives"*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Vol. 7, pp. 1-68.

[3] **Ellsberg, D. (1961):** *"Risk, ambiguity, and Savage axioms"*, Quartely Journal of Economics, Vol. 75, pp. 643-669.

[4] **Epstein, L. G.; Schneider, M. (2008):** *"Ambiguity, information quality and asset pricing"*, The Journal of Finance, Vol. 63(1), pp. 197-228, February.

[5] **Fishburn, P. C. (1970):** *"Utility theory for decision making"*, John Wiley & Sons, inc., New York.

[6] **Gilboa, I.; Schmeidler, D. (1989):** *"Maximin expected utility with a unique prior"*, Journal os Mathematical Economics, Vol. 18, pp. 141-153.

[7] **Kreps, M. D. (1988):** *"Notes on the theory of choice"*, Westview Press.

[8] **Luce, R. D. (1966):** *"Two extentions on conjoint measurement: a new type of fundamental measurement"*, Journal of Mathematical Psycology, Vol. 3, pp. 348-370.

[9] **Luce, R. D.; Tukey, J. (1964):** *"Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental measurement"*, Journal of Mathematical Psycology, Vol. 1, pp. 1-27.

[10] **Maccheroni F.; Marinacci M.; Rustichini A. (2006).** *"Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences"*, Econometrica, Econometric Society, vol. 74(6), pages 1447-1498, November.

[11] **Machina, M. J.; Schmeidler, D. (1992):** *"A more robust definition of subjective probability"*, Econometrica, Econometric Society, Vol. 60, No. 4, pp. 745-780.

[12] **Marinacci, M.; Montrucchio, L. (2004):** *"Introduction to the mathematics of ambiguity, in uncertainty in economic theory"*, I. Gilboa ed., Routledge, London.

[13] **Mehra, R.; Prescott, E. C. (1985):** *"The equity premium: a puzzle"*, Journal of Monetary Economics, Vol. 15, pp. 145-161.

[14] **Raiffa, H. (1961):** *"Risk, ambiguity, and the Savage axioms: comment"*, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 75, No. 4, pp. 690-694, November.

[15] **Savage, L. J. (1954):** *"The foundations of statistics"*, John Wiley & Sons, inc., New York.

[16] **von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1947):** *"Theory of games and economic behavior"*, John Wiley & Sons, inc., New York.